SEMINARIUM
MATEMATYKA DYSKRETNA

wtorek, 8 kwietnia 2025 r., godz. 12:30, s. 612 C7

Bezkonfliktowe krawędziowe kolorowania grafów niemal regularnych

Mateusz Kamyczura
WMS AGH

Pierwsze badania w obszarze kolorowań bezkonfliktowych koncentrowały się głównie na wersji wierzchołkowej tego problemu. Bezkonfliktowa liczba chromatyczna $\chi_{CF}(G)$ grafu G jest definiowana jako najmniejsza liczba kolorów wymagana w kolorowaniu wierzchołków G, do tego aby każdy wierzchołek miał co najmniej jednego unikalnie pokolorowanego sąsiada w swoim domkniętym sąsiedztwie. Pach i Tardos [5] pokazali, że $\chi_{CF}(G)$ spełnia górne oszacowanie rzędu $O(\log^{2+\epsilon}\Delta)$, podczas gdy konstrukcje przedstawione przez Glebova, Szabó i Tardosa [2] dowodzą, że to oszacowanie jest asymptotycznie dokładne. Kostochka, Kumbhat i Łuczak [4] badali bezkonfliktowe kolorowania hipergrafów, podkreślając ich zastosowania w problemach kombinatorycznych.

W kontekście kolorowania krawędzi, kolorowanie jest uznawane za bezkonfliktowe, jeśli w domkniętym sąsiedztwie każdej krawędzi występuje co najmniej jedna krawędź o unikalnym kolorze. Minimalna liczba kolorów wymagana do takiego kolorowania, określana jako bezkonfliktowy indeks chromatyczny grafu G, oznaczana jest jako $\chi'_{CF}(G)$. Korzystając z metody probabilistycznej, Dębski i Przybyło [1] wykazali, że istnieją pewne rodziny grafów, dla których $\chi'_{CF}(G) \geqslant (1-o(1))\log_2\Delta$. Następnie Kamyczura, Meszka i Przybyło [3] udowodnili, że $\chi'_{CF}(G) \leqslant 3\lceil\log_2\Delta\rceil + 1$, co było bezpośrednią konsekwencją silniejszego twierdzenia: $\chi'_{CF}(G) \leqslant 3\lceil\log_2\chi(G)\rceil + 1$.

Udowodniliśmy, że dla grafów pełnych $\chi'_{CF}(K_n) \leqslant \lceil\log_2(n-1)\rceil + 1$ oraz, wykorzystując metody probabilistyczne, wykazaliśmy, że dla grafów niemal regularnych o dostatecznie dużym Δ, $\chi'_{CF}(G) \leqslant \log_2\Delta(1+o(1))$.

[1] M. Debski, J. Przybyło, Conflict-free chromatic number vs conflict-free chromatic index, J. Graph Theory, 2022;99:349–58. https://doi.org/10.1002/jgt.22743.

[2] R. Glebov, T. Szabó, G. Tardos, Conflict-free colouring of graphs, Combin. Probab. Comput., 23(3) (2014) 434–448.

[3] M. Kamyczura, M. Meszka, J. Przybyło, A note on the conflict-free chromatic index, Discrete Math. 347(4), (2024). https://doi.org/10.1016/j.disc.2024.113897

[4] A. Kostochka, M. Kumbhat, T. Łuczak, Conflict-Free Colourings of Uniform Hypergraphs With Few Edges, Combin. Probab. Comput. 21(4) (2012) 611–622.

[5] J. Pach, G. Tardos, Conflict-free colourings of graphs and hypergraphs, Combin. Probab. Comput. 18(5) (2009) 819 – 834.